Das Invarianzprinzip

Invarianzprinzip

Wenn sich etwas ändert, achtet man darauf, was gleich bleibt.

Zahlen an der Tafel

Sei n eine ungerade Zahl. An einer Tafel stehen die natürlichen Zahlen von 1 bis $2n$. Es werden zwei Zahlen ausgewählt, gelöscht und der Betrag ihrer Differenz wird stattdessen an die Tafel geschrieben. Dies wird so lange wiederholt, bis nur noch eine Zahl übrig ist. Begründe, dass diese letzte Zahl ungerade ist.

Zahlen am Sechseck

Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 werden in dieser Reihenfolge an die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks geschrieben, sodass an jeder Ecke eine Zahl steht. Die Zahlen werden schrittweise verändert. In einem Schritt werden zwei benachbarte Zahlen um 1 erhöht oder um 1 erniedrigt. Ist es möglich, dass nach endlich vielen Schritten alle sechs Zahlen gleich sind?

Steine am n-Eck

Auf jeder Ecke eines regelmäßigen n-Ecks liegt zunächst ein Spielstein. Die Spielsteine werden schrittweise verschoben. Ein Schritt besteht daraus, dass ein Stein im Uhrzeigersinn zur nächsten Ecke und ein anderer Stein gegen den Uhrzeigersinn zur nächsten Ecke geschoben werden. Ist es möglich, dass nach endlich vielen Schritten alle Steine auf einer Ecke liegen?

Quadrat und Würfel ausfüllen

Kann man ein 10x10-Quadrat vollständig und überlappungsfrei mit 4x1-Rechtecken auslegen?

Kann man einen 10x10x10-Würfel vollständig mit 4x1x1-Quadern ausfüllen?

Punkte spiegeln

Eine Menge besteht zunächst aus sieben Eckpunkten eines Würfels. Sie wird schrittweise erweitert. In einem Schritt wird ein Punkt der Menge an einem anderen Punkt der Menge gespiegelt und der Bildpunkt zur Menge hinzugenommen. Ist es möglich, dass nach endlich vielen Schritten der achte Eckpunkt des Würfels zur Menge hinzukommt?

Weiterforschen

Recherchiere selbst zum Invarianzprinzip (z. B. im Internet oder in der Fachliteratur).

Literatur

Die obigen Aufgaben stammen aus:
Engel, A. (1998): Problem-Solving Strategies, Springer, New York (S. 2, 10, 12)
Mayer, W. (2002): Lösungsstrategien für mathematische Aufgaben, Aulis, Deubner, Köln (S. 100 ff.)