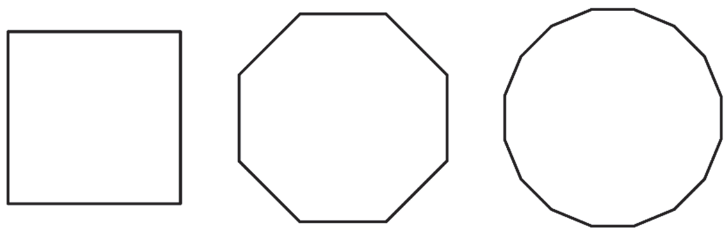
Bestimmung von π mit dem Verfahren von Cusanus

Welchen Zahlenwert hat die Kreiszahl π? Diese Frage beschäftigt Menschen bereits seit Jahrtausenden. Da π eine irrationale Zahl ist, ist der zugehörige Dezimalbruch unendlich lang und nicht periodisch. Im Folgenden können Sie ein Verfahren kennenlernen, um π näherungsweise zu berechnen. Es geht auf den Theologen und Philosophen Nikolaus von Kues (1401-1464), genannt Cusanus, zurück.

Die Idee

Wir betrachten eine Folge von regelmäßigen Vielecken, die alle den gleichen Umfang 2 besitzen. Ausgangspunkt ist das Quadrat, dann wird schrittweise die Eckenzahl verdoppelt. Wir kommen damit zum regelmäßigen 8-Eck, 16-Eck, 32-Eck, …



Zu jedem dieser n-Ecke wird der Radius r_n des Inkreises und der Radius s_n des Umkreises berechnet. Für die Umfänge von Inkreis, n-Eck und Umkreis gilt

$$2\pi r_n < 2 < 2\pi s_n,$$

also:

$$\frac{1}{s_n} < \pi < \frac{1}{r_n}$$

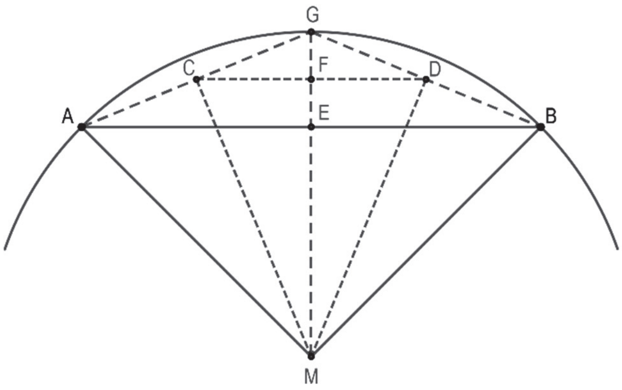
Mit zunehmender Eckenzahl nähern sich Inkreis- und Umkreisradius immer mehr einander an. Somit wird π durch die Werte $\frac{1}{s_n}$ und $\frac{1}{r_n}$ eingeschachtelt und dadurch immer genauer bestimmt.

Die Startwerte

Berechnen Sie die Werte r_4 und s_4, d. h. den Radius des Inkreises und den Radius des Umkreises eines Quadrats mit dem Umfang 2.

Die Rekursionsformeln

Die folgenden Überlegungen führen zu Formeln, mit denen man aus dem In- und dem Umkreisradius des n-Ecks die entsprechenden Radien des $2n$-Ecks berechnen kann.



In der Skizze sind vom n-Eck eine Seite $[AB]$, ein Teil des Umkreises und sein Mittelpunkt M abgebildet. Der Punkt E ist der Mittelpunkt von $[AB]$ und der Punkt G ist der Schnittpunkt der Halbgeraden $[ME$ mit dem Umkreis. Die Punkte C und D sind die Mittelpunkte von $[AG]$ und $[GB]$.

Begründen Sie:

1) $\overline{MG} = s_n$

2) $\overline{ME} = r_n$

3) $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

4) $\sphericalangle DMC = \frac{1}{2}\sphericalangle BMA$

5) $\overline{MC} = s_{2n}$

6) $\overline{MF} = r_{2n}$

Begründen Sie damit die Rekursionsformeln des Verfahrens von Cusanus:

$$r_{2n} = \frac{r_n + s_n}{2} \quad \text{und} \quad s_{2n} = \sqrt{r_{2n} \cdot s_n}$$

Mit diesen Rekursionsformeln können ausgehend vom In- und Umkreisradius des Quadrats die In- und Umkreisradien des 8-Ecks, 16-Ecks, 32-Ecks, … berechnet werden.

Umsetzung am Computer

Setzen Sie das Verfahren von Cusanus zur näherungsweisen Berechnung von π mit einem Computer um. Es eignen sich dazu beispielsweise Tabellenkalkulation oder Programmiersprachen.

Vertiefung

Mit geometrischer Anschauung ist plausibel, dass die Folge der Inkreisradien streng monoton wächst, die Folge der Umkreisradien streng monoton fällt und beide Folgen gegen den gleichen Grenzwert konvergieren. Weisen Sie dies algebraisch mit Hilfe der Rekursionsformeln nach.

Ein Tipp für Überlegungen zur Konvergenz: Aus den Rekursionsformeln folgt

$$s_{2n}{}^2 - r_{2n}{}^2 = \frac{1}{4}\left(s_n{}^2 - r_n{}^2\right).$$

Weiterforschen

Recherchieren Sie weiter zu Verfahren, mit denen die Kreiszahl π näherungsweise bestimmt werden kann. Setzen Sie diese mit einem Computer um.