Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Seien $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem offenen Intervall I stetige Funktion und $a \in I$. Dann ist die Integralfunktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \qquad , x \in I,$$

auf I differenzierbar und es gilt $F' = f$.

Beweis

Die Ableitung von F an einer Stelle $x \in I$ ist gemäß Definition $F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.

Wir betrachten zunächst $h > 0$ mit $x + h \in I$. Der Zähler des Differenzenquotienten ist:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Da f stetig ist, nimmt f das Minimum m und das Maximum M der Funktionswerte zum Intervall $[x, x+h]$ an. Für dieses Intervall ist $m \cdot h$ eine Untersumme und $M \cdot h$ eine Obersumme von f.
Damit ist:

$$m \cdot h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq M \cdot h$$

Nach Division durch h erhält man:

$$m \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq M$$

Beim Grenzprozess $h \to 0$ konvergieren wegen der Stetigkeit von f sowohl das Minimum m als auch das Maximum M gegen $f(x)$.

Damit konvergiert auch $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ gegen $f(x)$.

Diese Überlegungen lassen sich in entsprechender Weise auf den Fall $h < 0$ übertragen. Führen Sie dies durch!