Die Ableitung der Sinusfunktion

Die Sinusfunktion ist Ihnen bereits in früheren Jahrgangsstufen begegnet. Im Folgenden können Sie diese Funktion im Hinblick auf Steigungen des Graphen untersuchen und ihre Ableitungsfunktion bestimmen.

Graphisches Ableiten

Auf graphischem Weg können Sie einen Überblick über die Ableitung der Sinusfunktion gewinnen. Dazu können Sie Zeichnungen etwa auf Papier oder auch mit Software für dynamische Mathematik auf einem Bildschirm erstellen.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) Betrachten Sie an verschiedenen Stellen des Graphen der Sinusfunktion jeweils die Tangente und ermitteln Sie deren Steigung (insbesondere an den Nullstellen und den Extrema). Erkunden Sie dadurch den Verlauf der Ableitungsfunktion und skizzieren Sie ihren Graphen.

c) Welcher Funktionsterm passt aufgrund Ihrer Ergebnisse zur Ableitungsfunktion?

Zum Weiterdenken

Das graphische Ableiten liefert eine Vermutung über die Ableitung der Sinusfunktion. Allerdings ist das graphisch gewonnene Resultat noch nicht wirklich verlässlich. Ein präzise begründetes Ergebnis erhält man, wenn man auf die Definition der Ableitung zurückgreift und diese auf die Sinusfunktion anwendet.

Vorüberlegung: Die Funktion $g(x) = \frac{\sin x}{x}$

a) Untersuchen Sie die Funktion $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ mit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ in möglichst vielfältiger Hinsicht. Untersuchen Sie dabei insbesondere, wie sich diese Funktion in der Umgebung von 0 verhält.

b) Begründen Sie – z. B. durch Überlegungen am Einheitskreis –, dass für Winkel im Bogenmaß $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ gilt:

$$\sin x < x < \tan x$$

Folgern Sie daraus:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Betrachten Sie den Grenzprozess $x \longrightarrow 0$ und stellen Sie Bezüge zu Ihren Überlegungen aus a) her.

Die Ableitung der Sinusfunktion – präzise begründet

Eine Funktion f wird *differenzierbar* an einer Stelle x genannt, wenn der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{t \to x} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x)$ *Ableitung* von f an der Stelle x.

Bestimmen Sie mit dieser Definition die Ableitung der Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ für $x \in \mathbb{R}$.

Ein Tipp: Für die Umformung des Differenzenquotienten ist die allgemeine trigonometrische Formel

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

nützlich.