Vektoren und Vektorräume

Im Folgenden können Sie Ihre bisherigen Vorstellungen zu Vektoren schärfen und erweitern.

Rückblick

a) In welchen Zusammenhängen sind Ihnen bislang Vektoren begegnet?
b) Erklären Sie möglichst genau, was Sie unter einem Vektor verstehen.
c) Erklären Sie, was Sie unter der Addition zweier Vektoren und unter der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl verstehen.
d) Welche Rechengesetze kennen Sie für das Rechnen mit Vektoren? Können Sie diese begründen?

Typisch für die Entwicklung von Begriffen in der Mathematik ist, dass Beobachtungen, die man an konkreten Beispielen gemacht hat, abstrahiert beschrieben werden und dadurch ein allgemeiner Begriff gebildet wird. Dies gilt auch für den Begriff des Vektors. Die folgende Definition beschreibt, welche Eigenschaften eine Menge haben muss, damit man sie Vektorraum und ihre Elemente Vektoren nennt.

Definition

Eine Menge V zusammen mit einer Verknüpfung $+: V \times V \longrightarrow V$, die jeweils zwei Elementen $v, w \in V$ ein Element $v + w \in V$ zuordnet, sowie mit einer Verknüpfung $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$, die jeweils einer reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ und einem Element $v \in V$ ein Element $r \cdot v \in V$ zuordnet, heißt *Vektorraum über* $\mathbb{R}$ und ihre Elemente heißen *Vektoren*, wenn Folgendes erfüllt ist:

Eigenschaften der Addition von Vektoren:

- Für alle $v, w \in V$ gilt: $v + w = w + v$ (Kommutativität)
- Für alle $u, v, w \in V$ gilt: $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Assoziativität)
- Es gibt ein Element $0 \in V$, sodass für alle $v \in V$ gilt: $v + 0 = v$ (neutrales Element, Nullvektor)
- Zu jedem $v \in V$ gibt es ein Element $-v \in V$, sodass gilt: $v + (-v) = 0$ (inverses Element, Gegenvektor)

Eigenschaften der Multiplikation von Vektoren mit Zahlen:

- Für alle $v \in V$ gilt: $1 \cdot v = v$
- Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt: $(r \cdot s) \cdot v = r \cdot (s \cdot v)$
- Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt: $(r + s) \cdot v = r \cdot v + s \cdot v$
- Für alle $r \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$ gilt: $r \cdot (v + w) = r \cdot v + r \cdot w$

Bezüge zu Bekanntem

Stellen Sie Querverbindungen zwischen dieser Definition und Ihren Überlegungen zu Vektoren anhand der einleitenden obigen Arbeitsaufträge her.

Beispiele

Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen Vektorräume über $\mathbb{R}$ sind:

a) die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation

b) die Menge $\mathbb{R}^3$ der Tripel reeller Zahlen mit der Addition und Multiplikation

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}, \qquad r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ r \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

c) die folgenden Teilmengen des Raums $\mathbb{R}^3$ mit den in b) definierten Verknüpfungen (Stellen Sie die Mengen jeweils auch graphisch dar.):

$$\left\{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v_1 = v_2 = 0\right\}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v_1 = v_2 \text{ und } v_3 = 0\right\}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v_1 = 0\right\}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v_1 + v_2 + v_3 = 0\right\}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v_1 + v_2 + v_3 = 1\right\}$$

d) die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation

e) die Menge der auf $\mathbb{R}$ definierten quadratischen Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit der üblichen Addition von Funktionen und der Multiplikation von Funktionen mit Zahlen

f) die Menge der auf $\mathbb{R}$ definierten Polynomfunktionen mit reellen Koeffizienten

g) die Menge der auf einem Intervall definierten reellen Funktionen

h) die Menge der auf einem Intervall stetigen reellen Funktionen

i) die Menge der auf einem Intervall differenzierbaren reellen Funktionen

j) die Menge der geometrischen Verschiebungen als Abbildungen in einer Ebene

Weitere Eigenschaften von Vektorräumen

Aus der Definition von Vektorräumen lassen sich weitere Eigenschaften ableiten, die damit für alle Vektorräume gelten. Folgern Sie aus der Definition:

a) Für alle $v \in V$ gilt: $0 \cdot v = 0$
(Beachten Sie, dass das Zeichen 0 hier einmal für eine Zahl und einmal für einen Vektor steht.)

b) Für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt: $r \cdot 0 = 0$

c) Es gibt genau ein neutrales Element in V. In anderen Worten: Sind 0 und 0^* neutrale Elemente, dann ist $0 = 0^*$.