# Skalarprodukte

Im Folgenden können Sie Ihre bisherigen Vorstellungen zu Skalarprodukten schärfen und erweitern.

**Rückblick**

a) In welchen Zusammenhängen sind Ihnen bislang Skalarprodukte begegnet?
b) Erklären Sie möglichst genau, was Sie unter einem Skalarprodukt verstehen.
c) Wozu können Sie Skalarprodukte nutzen?
d) Welche Rechengesetze kennen Sie für Skalarprodukte? Können Sie diese begründen?

Mit einem Skalarprodukt wird jeweils zwei Vektoren eine reelle Zahl zugeordnet. Über Eigenschaften dieser Zuordnung können Skalarprodukte in beliebigen Vektorräumen über $\mathbb{R}$ definiert werden.

**Definition**

Es sei $V$ ein Vektorraum mit einer Addition $+: V \times V \longrightarrow V$ von Vektoren und einer Multiplikation $\cdot: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ reeller Zahlen mit Vektoren.

Eine Abbildung $*: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, die jeweils zwei Vektoren $v, w \in V$ eine reelle Zahl $v * w \in \mathbb{R}$ zuordnet, heißt *Skalarprodukt*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Für alle $v \in V \backslash \{0\}$ gilt: $v * v > 0$ (positive Definitheit)
- Für alle $v, w \in V$ gilt: $v * w = w * v$ (Symmetrie)
- Für alle $u, v, w \in V$ gilt: $(u + v) * w = (u * w) + (v * w)$ (Additivität)
- Für alle $v, w \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt: $(r \cdot v) * w = r \cdot (v * w)$ (Homogenität)

**Beispiel: Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$**

Aus dem Mathematikunterricht ist Ihnen das sog. Standard-Skalarprodukt für den Raum $\mathbb{R}^3$ bekannt. Für Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ ist dieses Skalarprodukt $v * w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$.

Weisen Sie nach, dass die dadurch definierte Abbildung $*: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ alle Eigenschaften aus der obigen Definition für Skalarprodukte besitzt.

**Beispiel: Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$**

Das vorherige Beispiel lässt sich von $\mathbb{R}^3$ auf $\mathbb{R}^n$ mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern. Weisen Sie nach, dass durch

$$v * w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert ist.

**Beispiel: Skalarprodukt von Funktionen**

Betrachtet wird der Vektorraum aller auf dem Intervall $[0; 1]$ stetigen Funktionen. Für zwei solche Funktionen $f$ und $g$ definieren wir:

$$f * g = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

Zeigen Sie, dass hierdurch ein Skalarprodukt definiert ist.

Geben Sie zwei Funktionen $f$ und $g$ an, die nicht konstant Null sind und für die gilt: $f * g = 0$

**Weitere Eigenschaften von Skalarprodukten**

Aus der Definition von Skalarprodukten lassen sich weitere Eigenschaften ableiten, die damit für alle Skalarprodukte gelten. Folgern Sie aus der Definition:

a) Für den Nullvektor gilt: $0 * 0 = 0$

b) Für alle $v \in V$ gilt: $0 * v = v * 0 = 0$

c) Für alle $u, v, w \in V$ gilt: $u * (v + w) = (u * v) + (u * w)$

d) Für alle $v, w \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt: $v * (r \cdot w) = r \cdot (v * w)$

**Längen und Winkel**

In einem Vektorraum $V$ mit einem Skalarprodukt können Längen und Winkel definiert werden.

a) Für einen Vektor $v \in V$ heißt die Zahl $|v| = \sqrt{v * v}$ *Länge* oder *Betrag* von $v$.

b) Für zwei Vektoren $v, w \in V \backslash \{0\}$ ist der *Winkel* $\alpha \in [0°; 180°]$ zwischen $v$ und $w$ festgelegt durch:

$$\cos(\alpha) = \frac{v * w}{|v| \cdot |w|}$$

c) Zwei Vektoren $v, w \in V$ nennt man *orthogonal* oder *senkrecht zueinander*, wenn $v * w = 0$.

**Beispiel:** $\mathbb{R}^3$

Wenden Sie die vorige Definition auf den Raum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt an. Verdeutlichen Sie sich, dass diese Definition im Einklang mit den Begriffen der Länge, des Winkels und der Orthogonalität steht, die Sie seit vielen Jahren kennen.

**Beispiel:** $\mathbb{R}^5$

Berechnen Sie Längen und Winkel zu selbst gewählten Vektoren im Raum $\mathbb{R}^5$ mit dem Standard-Skalarprodukt.

Finden Sie möglichst viele Vektoren im Raum $\mathbb{R}^5$, die allesamt paarweise zueinander orthogonal sind.