Bestimmtes Integral

Im Mathematikunterricht haben Sie den Begriff des bestimmten Integrals erarbeitet. Im Folgenden können Sie eine präzise Definition des Integralbegriffs kennenlernen. Sie geht auf Bernhard Riemann (1826-1866) und Weiterentwicklungen durch Jean Gaston Darboux (1842-1917) zurück. Dementsprechend wird dieser Integralbegriff auch „Riemann-Integral" oder „Riemann-Darboux-Integral" genannt.

Definition

Sei M eine Menge reeller Zahlen.

- Eine Zahl $U \in \mathbb{R}$ heißt *untere Schranke* von M, wenn für alle $m \in M$ gilt: $U \leq m$.
- Eine Zahl heißt *Infimum* von M und wird mit $\inf M$ bezeichnet, wenn sie die größte untere Schranke von M ist.
- Eine Zahl $O \in \mathbb{R}$ heißt *obere Schranke* von M, wenn für alle $m \in M$ gilt: $m \leq O$.
- Eine Zahl heißt *Supremum* von M und wird mit $\sup M$ bezeichnet, wenn sie die kleinste obere Schranke von M ist.

Überlegen Sie sich vielfältige Beispiele zu diesen Begriffen.

Definition

Wir betrachten eine Funktion f, die auf einem Intervall $[a; b]$ definiert und beschränkt ist. (Die Beschränktheit bedeutet, dass es für die Funktionswerte auf dem Intervall eine obere und eine untere Schranke gibt.)

Unter einer *Zerlegung* $Z = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ des Intervalls $[a; b]$ in $n \in \mathbb{N}$ Teile versteht man eine Menge von Zahlen aus diesem Intervall mit $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$. Sie sind die Grenzen von Teilintervallen $[t_0; t_1]$, $[t_1; t_2]$, ..., $[t_{n-1}; t_n]$, die zusammen das Intervall $[a; b]$ ergeben.

Für jedes Teilintervall $[t_{i-1}; t_i]$ existieren wegen der Beschränktheit von f das Infimum m_i und das Supremum M_i der Funktionswerte auf diesem Teilintervall, wobei $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$.

Damit heißen

$$U_Z = m_1 \cdot (t_1 - t_0) + m_2 \cdot (t_2 - t_1) + \cdots + m_n \cdot (t_n - t_{n-1})$$

Untersumme und

$$O_Z = M_1 \cdot (t_1 - t_0) + M_2 \cdot (t_2 - t_1) + \cdots + M_n \cdot (t_n - t_{n-1})$$

Obersumme von f zur Zerlegung Z.

Die Funktion f nennt man *integrierbar* über dem Intervall $[a; b]$, wenn das Supremum aller über dem Intervall bildbaren Untersummen gleich dem Infimum aller über dem Intervall bildbaren Obersummen ist (für beliebige Zerlegungen), d. h. wenn

$$\sup\{U_Z \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a; b]\} = \inf\{O_Z \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a; b]\}.$$

Dieser Wert heißt dann *bestimmtes Integral von f über* $[a; b]$ und wird mit

$$\int_a^b f(x)dx$$

bezeichnet.

Vergleich

Vergleichen Sie die obige Definition bestimmter Integrale mit der bisherigen Definition aus dem Mathematikunterricht. Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede stellen Sie fest?

Beispiele

Untersuchen Sie anhand der obigen Definition, ob die folgenden Funktionen über dem Intervall $[0; 1]$ integrierbar sind, und bestimmen Sie ggf. den Wert des Integrals über diesem Intervall:

a) $f(x) = c$ für ein festes $c \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$