Stetigkeit von Funktionen

Das Porto für einen Brief hängt von seinem Gewicht (und auch von seinen Maßen) ab. Informieren Sie sich hierüber und stellen Sie die Abhängigkeit des Portos vom Gewicht mit einem Funktionsgraphen dar.

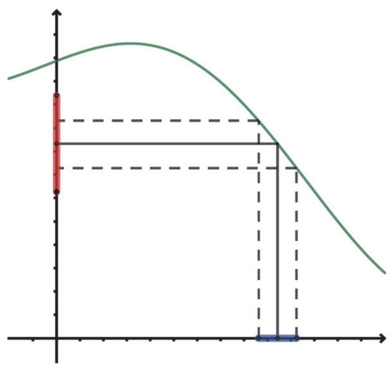
In großen Bereichen hat eine kleine Änderung des Briefgewichts keine Auswirkung auf das Porto. An manchen Stellen bewirkt eine kleine Änderung des Gewichts jedoch eine sprunghafte Änderung des Portos. Dieses Phänomen wird mit dem Begriff der „Stetigkeit" mathematisch gefasst.

Definition

Eine Funktion $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ nennt man an einer Stelle a ihres Definitionsbereichs *stetig*, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gibt, sodass gilt:
Für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ ist $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Interpretation

Interpretieren Sie die Definition der Stetigkeit an einer Stelle anhand folgender Abbildung:



Kriterium

Eine Funktion $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei an einer Stelle a sowie im Bereich unmittelbar links und/oder rechts von dieser Stelle definiert. Die Funktion ist genau dann stetig bei a, wenn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Begründen Sie dieses Kriterium anhand der Definition. Interpretieren Sie dieses Kriterium anschaulich und graphisch.

Beispiele

1. Geben Sie Beispiele von Funktionen an, die an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig sind.

2. Geben Sie Beispiele von Funktionen an, die an einer oder mehreren Stellen ihres Definitionsbereichs nicht stetig sind.

3. Begründen Sie, an welchen Stellen die folgenden Funktionen stetig sind:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Stetigkeit anschaulich

Beschreiben Sie anschaulich mit Worten und Zeichnungen, was man sich darunter vorstellen kann, dass eine Funktion

- an einer Stelle stetig ist,
- an einer Stelle nicht stetig ist,
- an allen Stellen eines Intervalls stetig ist.

Stetigkeitssätze

Es seien f und g Funktionen, die an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig sind. Begründen Sie, dass dann auch die Funktionen $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ an der Stelle a stetig sind (wobei bei $\frac{f}{g}$ zusätzlich $g(a) \neq 0$ vorauszusetzen ist).

Folgerungen

Wenden Sie die Stetigkeitssätze auf selbst gewählte Beispiele an.

Begründen Sie anhand der Stetigkeitssätze, dass jede Polynomfunktion und jede rationale Funktion an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig ist.