Grenzwerte präzisiert

Mit Grenzwerten wird beschrieben, wie sich Funktionen in der Nähe einzelner Stellen verhalten – beispielsweise ob sich die Funktionswerte einem bestimmten Wert immer mehr annähern oder nicht. Die etwas vagen Formulierungen „verhalten“ und „annähern“ werden mit der folgenden Definition präzisiert.

Definition

Eine Funktion $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ sei im Bereich unmittelbar links und/oder rechts von einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ definiert. Diese Stelle kann also zum Definitionsbereich gehören, muss es aber nicht.

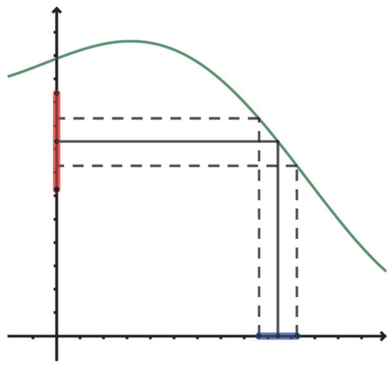
Die Funktion *konvergiert* für $x \longrightarrow a$ gegen den Wert $c \in \mathbb{R}$, falls Folgendes erfüllt ist:

> Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $\delta > 0$, so dass gilt: Für alle $x \in D$ mit $0 < |x - a| < \delta$ ist $|f(x) - c| < \varepsilon$.

In diesem Fall nennt man c den *Grenzwert* von $f(x)$ für $x \longrightarrow a$ und bezeichnet diesen mit $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Interpretation

Interpretieren Sie die Definition des Grenzwerts anhand folgender Abbildung:



Beispiele

Begründen Sie anhand der Definition, ob die folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

a) Die konstante Funktion $f(x) = 2, x \in \mathbb{R}$, an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$.

b) Die Funktion $f(x) = x^2 - 4, x \in \mathbb{R}$, an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$.

c) Die Funktion $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, an der Stelle 2.

d) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-2}, x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, an der Stelle 2.

e) Die Funktion $f(x) = x + \frac{|x|}{x}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, an der Stelle 0.

f) Die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, an der Stelle 0.

g) Die Funktion $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, an der Stelle 0.

Grenzwertsätze

Es seien f und g Funktionen, die an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ konvergieren. Begründen Sie, dass dann auch die Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotientenfunktion an dieser Stelle konvergiert und dass gilt:

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$\lim_{x\to a}(f(x) : g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) : \lim_{x\to a} g(x)$, falls g in einer Umgebung von a nirgends Null ist und auch $\lim_{x\to a} g(x)$ nicht Null ist.

Wenden Sie die Grenzwertsätze auf selbst gewählte Beispiele an.