# Grenzwerte präzisiert

Mit Grenzwerten wird beschrieben, wie sich Funktionen in der Nähe einzelner Stellen verhalten – beispielsweise ob sich die Funktionswerte einem bestimmten Wert immer mehr annähern oder nicht. Die etwas vagen Formulierungen „verhalten“ und „annähern“ werden mit der folgenden Definition präzisiert.

## Definition

Eine Funktion mit sei im Bereich unmittelbar links und/oder rechts von einer Stelle definiert. Diese Stelle kann also zum Definitionsbereich gehören, muss es aber nicht.

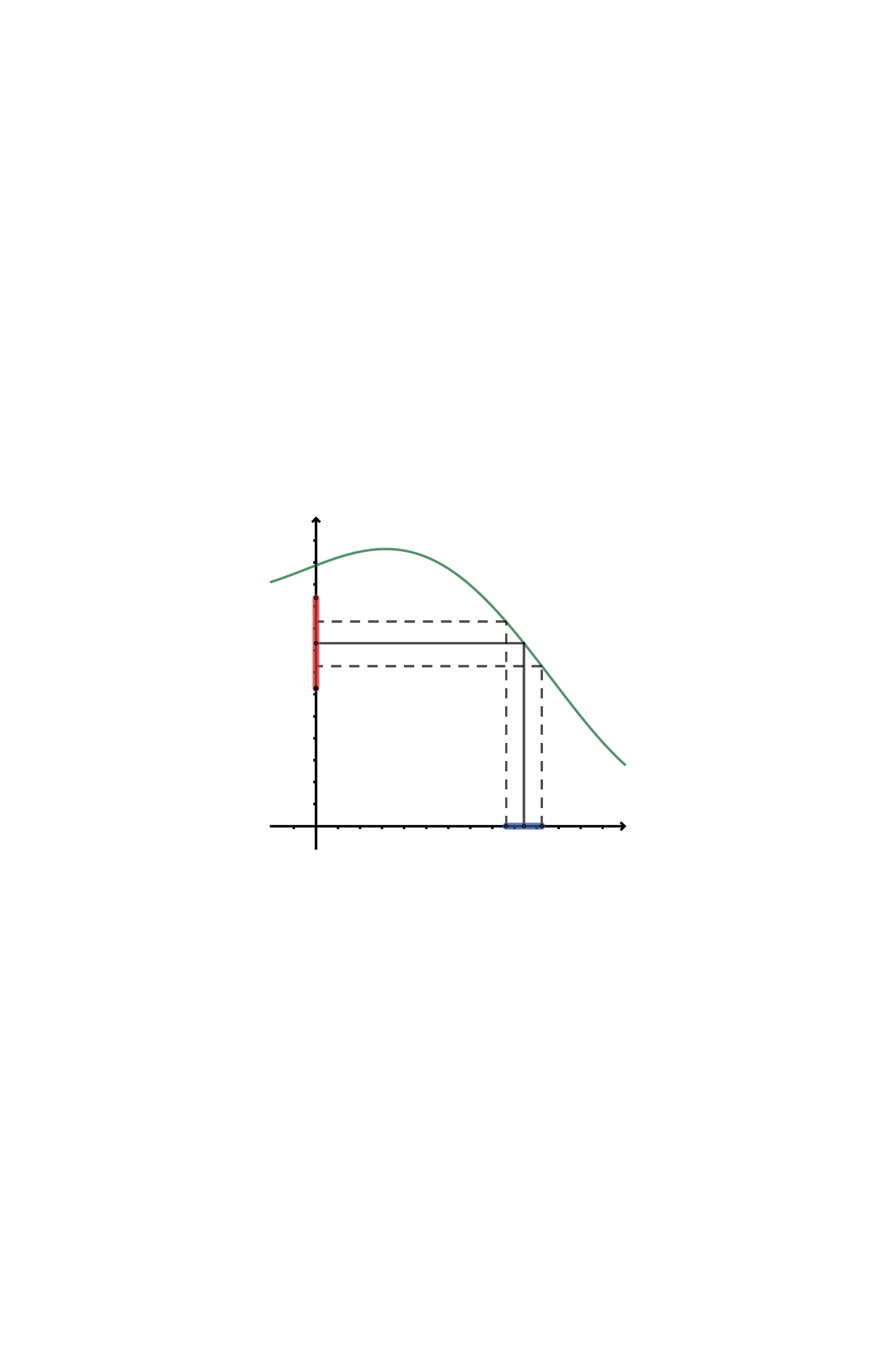
Die Funktion *konvergiert* für gegen den Wert , falls Folgendes erfüllt ist:

Zu jeder Zahl gibt es eine Zahl , so dass gilt: Für alle mit ist .

In diesem Fall nennt man *c* den *Grenzwert* von für und bezeichnet diesen mit .

## Interpretation

Interpretieren Sie die Definition des Grenzwerts anhand folgender Abbildung:



## Beispiele

Begründen Sie anhand der Definition, ob die folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

1. Die konstante Funktion an jeder Stelle .
2. Die Funktion an jeder Stelle .
3. Die Funktion an der Stelle 2.
4. Die Funktion an der Stelle 2.
5. Die Funktion an der Stelle 0.
6. Die Funktion an der Stelle 0.
7. Die Funktion an der Stelle 0.

## Grenzwertsätze

Es seien *f* und *g* Funktionen, die an einer Stelle konvergieren. Begründen Sie, dass dann auch die Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotientenfunktion an dieser Stelle konvergiert und dass gilt:

, falls in einer Umgebung von nirgends Null ist und auch nicht Null ist.

Wenden Sie die Grenzwertsätze auf selbst gewählte Beispiele an.