# Größter gemeinsamer Teiler und Euklidischer Algorithmus

Die Mathematiker Euklid lebte etwa um 300 v. Chr. in Griechenland. Sein berühmtestes Werk sind „Die Elemente“ – ein Schriftwerk, in dem er das mathematische Wissen seiner Zeit zusammengefasst und systematisiert hat. In diesem Werk wird auch ein Verfahren zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen beschrieben. Dieses Verfahren wird Euklidischer Algorithmus genannt, auch wenn es bereits vor Euklid bekannt war. Du kannst es im Folgenden kennenlernen.

## Größter gemeinsamer Teiler

Der *größte gemeinsame Teiler* zweier natürlicher Zahlen und ist die größte natürliche Zahl, die Teiler von und von ist. Sie wird mit bezeichnet.

Bestimme , , , ,

, , .

Beschreibe ein Verfahren, wie man den ggT zweier Zahlen bestimmen kann.

Ist dieses Verfahren auch für praktikabel?

## Euklidischer Algorithmus mit Subtraktionen

Überlege Dir, warum folgende Aussagen für natürliche Zahlen , und mit zutreffen:

1. Wenn die Zahlen und teilt, dann teilt auch die Summe und die Differenz .
2. Wenn die Zahl und die Differenz teilt, dann teilt auch die Zahl .
3. Die Zahlen und haben genau die gleichen gemeinsamen Teiler wie die Zahlen und .

Die letzte Gleichung kann man praktisch nutzen: Statt den ggT von und zu suchen, sucht man den ggT von und . Durch das Subtrahieren hat man kleinere Zahlen, deren ggT gesucht ist. Man kann diesen Schritt des Subtrahierens so oft hintereinander ausführen, bis man den ggT direkt ablesen kann.

Ein Beispiel:

Bestimme auf diese Weise den ggT selbst gewählter Zahlen.

Erstelle eine Software, die mit diesem Verfahren den ggT zweier einzugebender Zahlen berechnet. Beispielsweise könntest Du Tabellenkalkulation verwenden oder mit einer Programmiersprache ein Programm erstellen.

## Euklidischer Algorithmus mit Divisionen mit Rest

Der oben beschriebene Algorithmus hat den Nachteil, dass recht viele Schritte erforderlich sind, wenn große Zahlen gewählt werden. (Wie viele Schritte sind nötig, um damit zu berechnen?)

Eine wesentliche Verbesserung des Algorithmus wird erzielt, wenn man anstelle der Differenz den Rest bei der Division von durch betrachtet.

Beispielsweise ergibt die ganzzahlige Division von 23 durch 5 das Ergebnis 4 mit dem Rest 3, denn es ist .

Allgemein bezeichnen wir bei der ganzzahligen Division von durch den Rest mit . Es ist also   
 und es gibt eine Zahl mit .

Überlege Dir, warum folgende Aussagen zutreffen:

1. Wenn die Zahlen und teilt, dann teilt auch die Zahl .
2. Wenn die Zahlen und teilt, dann teilt auch die Zahl .
3. Die Zahlen und haben genau die gleichen gemeinsamen Teiler wie die Zahlen und .

Mit der letzten Gleichung kann man anstelle des ggT von und den ggT von und suchen. Dieser Schritt kann so oft hintereinander ausführt werden, bis man den ggT direkt ablesen kann.

Ein Beispiel:

Bestimme auf diese Weise den ggT selbst gewählter Zahlen.

Erstelle eine Software, die mit diesem Verfahren den ggT zweier einzugebender Zahlen berechnet. Verwende beispielsweise Tabellenkalkulation oder eine Programmiersprache.

## Weiterforschen

Recherchiere zum Euklidischen Algorithmus weiter – beispielsweise im Internet oder in der mathematischen Literatur. Erkunde beispielsweise seine Bedeutung in Zusammenhang mit Kettenbrüchen oder in der Geometrie.