# Bestimmtes Integral

Im Mathematikunterricht haben Sie den Begriff des bestimmten Integrals erarbeitet. Im Folgenden können Sie eine präzise Definition des Integralbegriffs kennenlernen. Sie geht auf Bernhard Riemann (1826-1866) und Weiterentwicklungen durch Jean Gaston Darboux (1842-1917) zurück. Dementsprechend wird dieser Integralbegriff auch „Riemann-Integral“ oder „Riemann-Darboux-Integral“ genannt.

## Definition

Sei eine Menge reeller Zahlen.

* Eine Zahl heißt *untere Schranke* von , wenn für alle gilt: .
* Eine Zahl heißt *Infimum* von und wird mit bezeichnet, wennsie die größte untere Schranke von ist.
* Eine Zahl heißt *obere Schranke* von , wenn für alle gilt: .
* Eine Zahl heißt *Supremum* von und wird mit bezeichnet, wenn sie die kleinste obere Schranke von *M* ist.

Überlegen Sie sich vielfältige Beispiele zu diesen Begriffen.

## Definition

Wir betrachten eine Funktion , die auf einem Intervall definiert und beschränkt ist. (Die Beschränktheit bedeutet, dass es für die Funktionswerte auf dem Intervall eine obere und eine untere Schranke gibt.)

Unter einer *Zerlegung* des Intervalls in Teile versteht man eine Menge von Zahlen aus diesem Intervall mit . Sie sind die Grenzen von Teilintervallen , , …, , die zusammen das Intervall ergeben.

Für jedes Teilintervall existieren wegen der Beschränktheit von das Infimum und das Supremum der Funktionswerte auf diesem Teilintervall, wobei .

Damit heißen

*Untersumme* und

*Obersumme* von *f* zur Zerlegung *Z*.

Die Funktion nennt man *integrierbar* über dem Intervall , wenn das Supremum aller über dem Intervall bildbaren Untersummen gleich dem Infimum aller über dem Intervall bildbaren Obersummen ist (für beliebige Zerlegungen), d. h. wenn

Dieser Wert heißt dann *bestimmtes Integral von über*  und wird mit

bezeichnet.

## Vergleich

Vergleichen Sie die obige Definition bestimmter Integrale mit der bisherigen Definition aus dem Mathematikunterricht. Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede stellen Sie fest?

## Beispiele

Untersuchen Sie anhand der obigen Definition, ob die folgenden Funktionen über dem Intervall integrierbar sind, und bestimmen Sie ggf. den Wert des Integrals über diesem Intervall:

1. für ein festes